

NÚMEROS

Revista de Didáctica de las Matemáticas

<http://www.sinewton.org/numeros>

ISSN: 1887-1984

Volumen 77, julio de 2011, páginas 51–73

Análisis de los términos de Inferencia Estadística en Bachillerato¹

Israel García Alonso (Instituto de Enseñanza Secundaria El Médano. Tenerife)

*Fecha de recepción: 15 de marzo de 2011**Fecha de aceptación: 12 de abril de 2011*

Resumen

Realizaremos un estudio pormenorizado de los significados de los diferentes términos que se utilizan en los libros de texto de Bachillerato en el momento en el que se comienza el estudio formal de la Inferencia Estadística. Se presenta un modelo de clasificación de los términos atendiendo al significado que presentan éstos según el contexto de trabajo: cotidiano o matemático. Analizaremos además cómo los comprenden los estudiantes y presentaremos una propuesta de enseñanza de la Estimación por Intervalos de Confianza.

Palabras clave

Estadística, Inferencia, Lenguaje, Contexto

Abstract

We present a detailed study of the meanings of different terms used in high school textbooks at the moment in which begins the formal study of statistical inference. We present a classification model taking into account the terms that have meaning in context of their work: everyday or mathematical. We will also analyze how students understand and present a teaching proposal for the Estimation of Confidence Intervals.

Keywords

Statistical, Inference, Language, Context

1. Introducción

La estadística surge como un conocimiento cultural imprescindible en la sociedad en la que vivimos actualmente. Este conocimiento adquiere cada vez más relevancia social, pues son muchas las informaciones y comunicaciones que se hacen utilizando esta herramienta, lo que ha significado que aparezca en la escuela, para su enseñanza y aprendizaje. Ya desde el año 1961 aparece la estadística en los currículos de Inglaterra (Holmes, 2002). Pero no será hasta la aparición de la LOGSE en 1990 cuando lo haga con mayor entidad en España; cuyo testigo recogieron las leyes posteriores hasta llegar a la actual Ley de Orgánica de Educación (LOE).

Por otro lado, existe una preocupación creciente en cómo se está formando en estadística durante la enseñanza obligatoria, qué dificultades existen y cómo podemos mejorar dicha formación. Todo esto ha llevado a que exista una cantidad creciente de investigaciones en Educación Estadística en los últimos años. A su vez, la comunidad investigadora quiere conocer cómo se están formando los futuros profesores de matemáticas que posteriormente van a enseñar la estadística. Como vemos, se trata de una cadena en la que estamos todos inmersos y cuya finalidad es la formación de ciudadanos capaces de interpretar, utilizar y transmitir informaciones que requieran el lenguaje estadístico.

¹ Este artículo está basado en la memoria de Tesis Doctoral realizada por el autor y dirigida por el Dr. Juan Antonio García Cruz, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, el 5 de noviembre de 2010.



Una característica que tiene la estadística que no debemos pasar por alto, y que ha ayudado a que se utilice en muchos campos del conocimiento, es que tiene un carácter eminentemente interdisciplinar. Esto es una gran ventaja, pues nos permite conocerla desde muchos puntos de vista diferentes y analizarla en diferentes contextos.

Los profesores de Enseñanza Secundaria estamos formando ciudadanos y la primera pregunta que nos hacemos es: ¿qué conceptos estadísticos debe conocer cualquier ciudadano? A esta cuestión nos responde el trabajo realizado por McLean (2002) que nos da como respuesta a la cuestión anterior lo siguiente:

- Probabilidad como una formalización del modo normal de pensamiento.
- Desarrollo y utilización de modelos probabilísticos.
- Utilización predictiva de modelos probabilísticos.
- Papel de los distintos métodos de cuantificación de la probabilidad.
- Concepto de población, particularmente como un modelo.
- Concepto de muestreo aleatorio de una población conocida.
- “Random variation” (variación aleatoria) y su modelización.
- Diseño de Muestreo aleatorio y razones para ello.
- Aproximación de una variable mediante intervalos.
- Modelo probabilístico para la variabilidad de una muestra estadística sobre una población de muestras.
- Intervalos de confianza para un parámetro.
- Selección entre modelos basados en una muestra de datos.
- Contraste de hipótesis como modelo de selección.
- Modelos de recuento para diferentes variaciones.
- Más selección entre modelos.

El autor reconoce que su lista difiere de otras en el tipo de expresiones utilizadas y en que ha escogido el contraste de hipótesis como elemento básico que debe conocer cualquier ciudadano. Son dos razones las que aporta para integrar este conocimiento en este listado: es el equivalente estadístico del método científico y por otro lado, tanto el contraste de hipótesis como la investigación científica son desarrollos formalizados de un método de pensamiento cotidiano.

Además, debemos tener en cuenta que ante un resultado estadístico existe un aspecto que fácilmente aparece en cualquier ciudadano y que no debemos subestimar: las intuiciones. No podemos perder de vista que las intuiciones en probabilidad, pues si no se orientan adecuadamente, pueden ser elementos que nos distraigan en la toma de decisiones o cuando realizamos juicios de valor. Un ciudadano estadísticamente culto debe controlar sus intuiciones sobre el azar, utilizando el razonamiento estadístico.

Todo lo anterior nos muestra las habilidades, hábitos, intuiciones, conocimientos y expresiones que de la cultura estadística se requiere en nuestra sociedad, y que debemos controlar y utilizar de manera correcta. En este sentido, el profesorado será el responsable de desarrollar en los ciudadanos la estadística que se exige. Pero previamente el profesorado debe poseer dicha cultura estadística. Por ello es muy importante la formación y motivación del profesorado. Que la estadística aparezca en el currículo no significa que se esté enseñando en las aulas. El profesor debe encontrarse con la formación y capacidad suficiente para poder desarrollar la formación estadística en el aula con confianza y seguridad. Y esto se consigue con una formación adecuada. ¿Se está teniendo esto en cuenta en la formación del profesorado?

Un aspecto a considerar en la formación del profesorado es el conocimiento didáctico de la materia (Thompson, 1992). Este conocimiento didáctico no es exclusivamente el conocimiento de la materia, sino que además debe haber realizado el profesorado una reflexión epistemológica del significado de los conceptos, un estudio de las dificultades, errores y obstáculos del alumnado en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas, y un análisis de los recursos metodológicos disponibles.

Todo lo anterior hace que se investigue en Educación Estadística. En este artículo se presenta una investigación realizada en este campo, en la que se trata de esclarecer las dificultades que aparecen cuando comenzamos el estudio de la Inferencia Estadística en Bachillerato, en lo relativo a los términos que utilizamos y cómo son introducidos en el aula. Nos interesa conocer ante qué dificultades se encuentran los docentes que en ocasiones provocan errores conceptuales graves y que deben ser evitados o corregidos tan pronto como se conozcan. ¿Se pueden evitar los errores de lenguaje? ¿Los errores conceptuales pueden surgir del lenguaje? ¿Se subsanan dichos errores con una mayor formación? Estas y otras cuestiones son las que nos interesan a lo largo de esta investigación.

La investigación desarrollada se divide a su vez en tres trabajos diferentes:

- Análisis de los libros de texto y de los términos de Inferencia Estadística que en ellos aparecen.
- Análisis de cómo comprenden los estudiantes los términos encontrados en los libros de texto relativos a la Inferencia Estadística.
- Elaboración de una propuesta de enseñanza para mejorar la comprensión de aquellos términos de Inferencia Estadística que suelen aparecer con errores conceptuales.

2. Análisis de los libros de texto de bachillerato

Nuestro primer trabajo de investigación consiste en analizar el tratamiento que de los términos estadísticos dan los libros de texto de Bachillerato. Para ello comenzamos seleccionando los libros de texto utilizados en 2º de Bachillerato por los profesores de la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (curso previo a la universidad, 17-18 años). Así, en una de las reuniones trimestrales a las que acuden los profesores de la materia, en la que se hace un seguimiento de la programación que se está desarrollando en este nivel educativo, se les preguntó por el libro de texto que utilizan, ya sea directamente en el aula o bien para elaborar los apuntes que luego utilizan en clase. Cabe resaltar que, a estas reuniones, acuden todos los profesores de la provincia de Santa Cruz de Tenerife (Islas Canarias, España), tanto los profesores de la enseñanza pública como los de la enseñanza privada-concertada y privada que imparten las matemáticas en 2º de Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. La mayor parte de los profesores son licenciados en matemáticas y a la citada reunión acudieron en total 37 profesores.

Para la recogida de datos se elaboró un pequeño cuestionario. Se les pidió que indicaran el libro de texto que utilizaban. Del cuestionario extrajimos los cuatro libros de texto más utilizadas por el profesorado y sobre los que hemos realizado nuestra investigación. Estos textos son los correspondientes a las editoriales:

Anaya (T1); SM (T2); Santillana (T3); Edelvives (T4)

Por otro lado, también se preguntó a los profesores sobre la utilidad que tenía el libro de texto para él, es decir, si se utilizaba directamente en el aula por el alumnado, o sólo para elaborar los



apuntes. Nos parece muy significativo que, para una parte importante del profesorado encuestado (unos 30 profesores de los 37) el libro de texto se utiliza para refrescar, recordar los conceptos estadísticos que luego van a desarrollar con el alumnado. Por lo tanto, el libro de texto es un elemento fundamental en la formación del propio docente en cuanto a los conceptos estadísticos que luego va a impartir. Con esta información, podemos considerar que el libro de texto tiene una relevancia aún mayor, si cabe, pues de él va a depender, no sólo la formación en estadística de los estudiantes, sino también parte de la formación del propio docente.

Una vez seleccionados los libros de texto, prestamos especial atención a las lecciones relacionadas con la inferencia estadística. En este sentido, realizamos una descripción de cómo trata el libro de texto la inferencia estadística, qué términos utiliza, en qué contexto se presenta un término, así como los ejemplos que ofrece para ilustrar las explicaciones. Seguidamente, seleccionamos todos los términos relacionados con Inferencia Estadística y aquellos términos estadísticos presentes en estos niveles y que se corresponden con conceptos previos a la inferencia estadística. La siguiente tabla recoge dichos términos según la editorial del libro de texto utilizado:

Anaya	Edelvives	Santillana	SM
Población	Población	Estimación puntual	Muestras
Muestra	Individuo	Estimación por intervalos	Azar
Media	Muestra	Probabilidad	Población
Desviación Típica	Tamaño de la muestra	Media muestral	Teoría del muestreo
Distribución	Parámetros	Media poblacional	Inferir
Probabilidad	Nivel de confianza.	L(X)	Parámetro Estadístico
Tamaño de la muestra	Estadísticos	Ley normal	Estimador puntual
Inferir	Estimación paramétrica	Muestras representativas	Estimación puntual
Grado de certeza	Estimación puntual	Parámetro poblacional	Teoría de la estimación
Estimación	Estimación por intervalos	Observaciones muestrales	Sesgo
Nivel de confianza = grado de certeza	Estadístico	Nivel de confianza	Estimador insesgado
Margen de error	Estimador puntual	Límites de confianza	Estimador eficiente
Estadística inferencial	Estimador insesgado	Estadístico	Intervalo de confianza
Incertidumbre	Estimador eficiente	Precisión del intervalo	Nivel de confianza
Estadística inductiva	Límites de confianza superior e inferior		Margen de error
Estadística hipotético-deductiva	Nivel de riesgo: α		Amplitud
Hipótesis	Valor crítico: $z_{\alpha/2}$		Intervalo
Parámetro			Estimador por intervalo
Muestra aleatoria			Coeficiente de confianza
Estimar			Nivel de significación o de riesgo
Media muestral			Valor crítico
Proporción muestral			Margen de error
Estimación puntual			Distribución binomial
Estimación mediante intervalos			
Intervalo de confianza			
Nivel de confianza			
Tamaño de la muestra			
Eficacia de la estimación α			
Nivel de confianza			
Error máximo admisible			
Cota de error			

Tabla 1. Términos seleccionados en los libros de texto

Como era de esperar, muchos términos son comunes a las diferentes editoriales. Aunque destacamos que aparecen algunos términos en algunas editoriales que se pueden considerar de un nivel de abstracción muy elevado para ser tratados en un primer curso de inferencia estadística, tales como eficacia de la estimación, estimador eficiente o estimador insesgado.

Una vez seleccionados los términos estadísticos encontrados en los libros de texto, nuestro siguiente paso consistió en estudiar el contexto en que habitualmente se presenta al alumnado. Hemos visto que los estudiantes, habituados al contexto cotidiano, se encuentran con un nuevo contexto que es el contexto matemático. Nuestro propósito es analizar la influencia de uno y otro contexto en los significados de los términos. Así, analizamos el significado de cada término, tanto en el contexto cotidiano como en el matemático. Pero en nuestro caso, como ya indicamos antes, no entendemos por “cotidiano” al significado que se da del término en la calle, el mercado, los pasillos de las escuelas, ... Pues nuestra intención es poder realizar un análisis riguroso del significado del contexto cotidiano y que pueda ser lo más universal posible. Es por lo que decidimos utilizar como referencia el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española. Entendemos que esta elección puede ser discutible, pero creímos desde un principio que se trataba del diccionario de referencia para todos los hispanohablantes y que recoge las acepciones de los términos del español que más se utilizan de forma habitual.

Como referente del contexto matemático hemos tomado dos Manuales Universitarios: ME = Mendenhall (1982) y MO = Moore (2005). El primero de ellos es un manual universitario con muchas aplicaciones y ejemplificaciones cuando desarrolla los conceptos estadísticos; y el segundo manual está escrito por el que fuera presidente de la Asociación Estadística Internacional. Con ellos tratamos de mostrar la definición formal que se da a los términos estadísticos. Encontramos que en algunos términos se daba un excesivo tecnicismo y requerían de un complicado aparato matemático para dar su definición. En estos casos tratamos de analizar si la simplificación llevada a cabo en los libros de texto de Bachillerato desvirtúa la definición correcta.

Una vez conocemos el significado de los términos en el contexto cotidiano y matemático, analizamos en qué categoría de las descritas por Shuard & Rothery (1984) se sitúa y realizamos la clasificación de cada término. Para ello, si ocurre que las definiciones del Diccionario y de los Manuales Universitarios son equivalentes o muy cercanas, situamos el término dentro de la categoría de “*términos con el mismo significado en ambos contextos*”(1). Si no está definido en el Diccionario y sólo aparece la definición en los Manuales Universitarios, diremos que dicho término tiene “*significado propio en el contexto matemático*”(3). Y cualquier término que no presente la misma definición en el Diccionario y en los Manuales Universitarios será catalogado como “*término con distinto significado en ambos contextos*”(2). El último paso de esta fase de la investigación consistirá en analizar qué ocurre con estos mismos términos en los textos de Bachillerato seleccionados, esto es, analizaremos cómo tratan los libros de texto cada uno de los términos estudiados para comprobar si se puede determinar a qué contexto se acerca más la definición y, en su caso, si la definición dada se puede considerar correcta o no.

Entendemos que el libro de texto de Bachillerato se sitúa entre los dos contextos (cotidiano y matemático) y está pensado para que el estudiante, con su lenguaje cotidiano, pueda acercarse a conceptos matemáticos más elaborados e incorpore términos propios del lenguaje matemático.

En total analizamos 28 términos relativos a la Inferencia Estadística quedando catalogados de la siguiente manera, tabla 2:



Categoría 1 Mismo significado en ambos contextos	Categoría 2 Distinto significado en ambos contextos	Categoría 3 Significado propio en el contexto matemático
Estadística Población Individuo Tamaño de la muestra	Media Estimación Muestra Probabilidad Inferir Distribución Riesgo Significativo	Estadístico Parámetro Muestreo aleatorio Nivel de confianza Error máximo admisible Desviación típica Normal Sesgado Eficiencia Proporción muestral Contraste de Hipótesis Hipótesis Nula Nivel de Significación Hipótesis Alternativa Error de Tipo I Error de Tipo II

Tabla 2.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de cómo procedimos a la clasificación de los términos y qué pudimos observar con respecto a las definiciones dadas en los libros de texto de Bachillerato analizados para cada uno de ellos.

2.1. Categoría 1: Mismo significado en ambos contextos

Integramos en esta categoría aquellos términos que no modifican su significado ni en el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española ni en los manuales universitarios. Vamos a mostrar algunos términos a modo de ejemplo, y analizaremos el comportamiento que tienen los libros de texto con estos términos:

Término: POBLACIÓN	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Acción y efecto de poblar 2. Conjunto de los individuos o cosas sometido a una evaluación estadística mediante muestreo.	ME.- Conjunto de todas las mediciones de interés para quien obtiene la muestra. MO.- Un grupo entero de individuos sobre el que queremos información se llama población.
TEXTOS	
T1.- “Población o universo es el conjunto de todos los individuos objeto de nuestro estudio”. T2.- “es el conjunto de todos los elementos que poseen una determinada característica. En general supondremos que la población es muy grande.” T3.- “cuando una investigación estadística va referida a un conjunto, colección o colectivo de elementos, este colectivo se llama población.” T4.- “el conjunto homogéneo de personas, animales o cosas sobre el que se va a realizar un estudio”.	

Si comparamos estas definiciones con las dadas en los diferentes textos, cabe destacar la definición dada en T4, donde se señala que el conjunto sea homogéneo. Se trata de un requisito que no es necesario, y podría inducir a errores conceptuales posteriores. Debemos tener en cuenta que pudiera

ser que la finalidad del estudio estadístico fuera determinar cierta característica homogénea en la población.

2.2 Categoría 2: Distinto significado en ambos contextos

En esta categoría clasificamos los siguientes términos: Media (como algoritmo), Muestra, Estimación, Inferir, Distribución, Probabilidad, Representativo, Riesgo.

Término: MUESTRA	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Porción de un producto o mercancía que sirve para conocer la calidad del género. 2. Parte o porción extraída de un conjunto por métodos que permiten considerarla como representativa de él.	ME.- Una muestra es un subconjunto de mediciones seleccionadas de la población de interés. MO.- Una muestra es la parte de la población que realmente examinamos con el objetivo de obtener información.
TEXTOS	
T1.- “un subconjunto extraído de la población. Su estudio sirve para inferir características de toda la población”. “Sin embargo, si la muestra está mal elegida (no es representativa)...” T2.- “un subconjunto de la población”. Para que “un estudio sea fiable habrá que cuidar mucho la elección de la muestra, con el fin de que sea realmente representativa de la población”. T3.- “parte de la población, debidamente elegida, que se somete a la observación científica en representación de la misma, con el propósito de obtener resultados válidos para toda la población”. Y que para que “una muestra se considere válida debe cumplir que (...) sea representativa” T4.- “Subconjunto de la población”. Se debe “hacer una buena selección”.	

Para este término podemos observar que la definición dada por los manuales universitarios es equivalente entre sí, mientras que la dada por el diccionario agrega la idea de que el subconjunto debe ser representativo del total. Este requisito no aparece en los manuales universitarios, pero podemos observar que sí lo recogen los libros de texto.

¿Qué se entiende por algo representativo? El Diccionario define este término como:

1. *Hacer presente algo con palabras o figuras que la imaginación retiene.*
2. *Ser imagen o símbolo de algo, o imitarlo perfectamente.*

Según esta definición, cuando se dice que una muestra es representativa se está indicando que la muestra debe “imitar perfectamente” o “ser imagen” de la población. Encontramos que se está fomentando de esta manera la concepción errónea descrita por Kahneman et al. (1982) denominada *heurística de la representatividad*, donde el estudiante espera que pequeñas muestras hereden todas las propiedades de la población. Sabemos que no es el parecido con la población lo que valida una muestra, sino su método de selección.

Pero además, es un hecho destacable que el Diccionario recoja la definición de muestra indicando que sea representativa. Esto nos demuestra que en el contexto cotidiano se ha adoptado una definición errónea de este tecnicismo, y que pudiera generar un obstáculo en el aprendizaje. Constatamos que algunos libros de texto fomentan esta concepción errónea.



Otro ejemplo de este tipo de categoría es el siguiente:

Término: INFERIR	
Diccionario	Manuales Universitarios
Sacar una consecuencia o deducir algo de otra cosa.	ME.- El objetivo de la estadística es hacer inferencias (predicciones, decisiones) acerca de una población. MO.- La inferencia estadística proporciona métodos que permiten sacar conclusiones de una población a partir de los datos de una muestra.

Las editoriales no dan una definición explícita del término.

Inferir es otro término de uso extendido en el contexto cotidiano. Pero, podemos observar que, el Diccionario hace una equivalencia entre inferir y deducir. En matemáticas son términos opuestos y con significados distintos. Por tanto, observamos que hay diferencia entre el significado del término en el contexto cotidiano y en el contexto matemático, lo que puede llevar a generar obstáculos en el aprendizaje.

Por otro lado, creemos que es algo muy relevante que ninguna de las editoriales más utilizadas dé una descripción o introducción al concepto de inferir, teniendo en cuenta que es un concepto central y que además es, obviamente, el objetivo fundamental de la Inferencia Estadística.

2.3 Categoría 3: Significado propio del contexto matemático

Esta es la categoría en la que más términos clasificamos: Estadístico, Parámetro, Muestreo aleatorio, Media muestral, Media poblacional, Nivel de confianza, Desviación típica, Nivel de significación, Estadística inductiva, Estadística hipotético-deductiva, Error máximo admisible, Normal, Sesgado, Eficiente, Proporción muestral.

Término: ESTADÍSTICO	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Perteneciente o relativo a la estadística. 2. Persona que profesa la estadística.	MO. Un estadístico es un número que se puede calcular a partir de los datos de la muestra sin utilizar ningún parámetro desconocido. En la práctica, solemos utilizar un estadístico para estimar el parámetro desconocido.
TEXTOS	
T1.- No lo define. T2.- “un valor numérico que describe una característica de la muestra”. T3.- “[valores o medidas] que caracterizan a una muestra”. T4.- No lo define.	

En el diccionario no encontramos ninguna definición de este término, tal y como se trabaja en estadística. Es por ello que este término lo situamos como un término específico del contexto matemático.

Es significativo que, no todos los libros de texto lo definen, y, aunque lo hagan, no lo utilizan posteriormente y hablan de parámetros poblacionales en vez de estadísticos, siendo un concepto tan importante, pues es el valor a partir del cual realizamos la inferencia estadística.

Término: PARÁMETRO	
Diccionario	Manuales Universitarios
1. Dato o factor que se toma como necesario para analizar o valorar una situación.	ME.- Las poblaciones son caracterizadas por medidas descriptivas numéricas, llamadas parámetros.
2. Variable que, en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno de ellos mediante su valor numérico.	MO. Un parámetro es un número que describe la población. En la práctica estadística el valor del parámetro no es conocido ya que no podemos examinar toda la población.
TEXTOS	
T1.- No lo define. T2.- “valor numérico que describe una característica de la población”. T3.- “los valores o medidas que caracterizan a la población” T4.- “a partir de una distribución podemos definir una serie de medidas características de la variable aleatoria denominadas parámetros.”	

Podemos observar que el diccionario no da una definición apropiada de lo que representa este término en el contexto estadístico. Entendemos, por ello, que este término tiene que ver con el lenguaje específico de la matemática. Pero, además, dentro del propio contexto matemático, encontramos que el término puede presentar varias acepciones, pues en la estadística se denomina así al valor de una característica de la población. Esto hace que necesariamente debamos definir el término.

Cabe destacar, que no todas las editoriales dan la definición de este término. Y las que lo hacen no dan ejemplos con los que facilitar su comprensión.

Término: NIVEL DE CONFIANZA	
Diccionario	Manuales Universitarios
El diccionario no define este término.	ME.- Probabilidad de que un intervalo de confianza incluya al parámetro estimado. MO. Un nivel de confianza C , proporciona la probabilidad de que en un muestreo repetido, el intervalo contenga el verdadero valor del parámetro.
TEXTOS	
T1.- “A partir de una muestra de tamaño n podemos estimar el valor de un parámetro de la población (...) Dando un intervalo dentro del cual confiamos que esté el parámetro. (...) Hallando la probabilidad de que tal cosa ocurra. A dicha probabilidad se la llama nivel de confianza”. T2.- “la probabilidad de que un estimador por intervalo cubra el verdadero valor del parámetro que se pretende estimar. Generalmente se representa por $1 - \alpha$ ”. T3.- “el nivel de confianza que tenemos de que la media de la población pertenezca al intervalo es $1 - \alpha$ ”. T4.- “Calcular dos valores entre los que esperamos que esté el parámetro buscado con un cierto nivel de confianza, que llamaremos $1 - \alpha$, donde α es el nivel de riesgo fijado de antemano”.	



Observamos que T2 y T3 hablan de la probabilidad de que el estimador esté en el intervalo, pero a continuación introducen una nomenclatura en la que interviene un valor nuevo: $1-\alpha$. Previamente no se ha definido α . En cambio, en T4 se dice que α es el nivel de riesgo. Se define un término en función de otro no definido.

Tanto T2 como T3 exponen un ejemplo que no va más allá de una anécdota sobre el significado de nivel de confianza. No hay ninguna de las actividades que incida en este concepto, sino que se trabaja con él en otros ejercicios.

T1 comenta el significado del concepto, pero T4 no hace mención alguna a ningún ejercicio en el que se explique el significado de nivel de confianza.

Entendemos que se trata de un concepto nuevo para los estudiantes y cuya comprensión puede no resultar fácil, pues dejamos de hablar de probabilidad y pasamos a hablar de nivel, y la confianza aparece como el opuesto de la significación, que a su vez representa un tipo de Error. Son varios conceptos entremezclados que las editoriales no consiguen separar y aclarar convenientemente, para facilitar su comprensión.

2.4 Conclusión del estudio de los términos estadísticos en los libros de texto

La primera categoría la constituyen los *términos con el mismo significado en ambos contextos*, y que por tanto no deberían presentar dificultad a los estudiantes, por aparecer de manera habitual en el lenguaje cotidiano. En este caso, la mayoría de los textos analizados han dado la definición correcta de los términos. Aunque hay algunos que en ocasiones añaden aspectos en la definición que modifican sensiblemente su significado.

La segunda categoría está formada por los *términos con distinto significado en ambos contextos*, que aparecen tanto en un contexto cotidiano como en el contexto matemático, pero, en este último contexto modifican su significado, y en ocasiones, este hecho pasa desapercibido para estudiantes y profesores. Esto puede provocar que el estudiante aprenda este concepto matemático con errores. Apreciamos que la mayoría de los textos analizados utilizan las definiciones dadas en el contexto cotidiano, en vez de usar la definición del contexto matemático. Esto es algo que consideramos grave, puesto que el libro de texto como herramienta de trabajo en el aula, tiene que ayudar a salvar los posibles obstáculos que en el proceso de enseñanza y aprendizaje se producen y presentar al estudiante los conceptos matemáticos de forma correcta.

La tercera categoría la constituyen los *términos propios del contexto matemático* que por tanto el estudiante desconoce y se introducen por primera vez a través del libro de texto. Encontramos que muchos de los textos no los definen, ya sea porque entienden que los conocen los estudiantes o por creer que de esta forma puedan simplificar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En otros casos, hemos observado que algunos textos introducen términos propios de la Inferencia Estadística que luego no vuelven a utilizar, o que utilizan denominándolos de otra forma. Ejemplo de ello es el término *estadístico*, al que se refieren los libros de texto como *parámetros poblacionales*. Esto, entendemos que puede provocar confusión o, al menos, nos indica que el libro de texto es inconsistente, por no utilizar aquellos términos que define.

Hemos constatado que las dificultades y posibles obstáculos debidos al lenguaje, descritos por Orton (1990), no son exclusivos del profesor, sino que los libros de texto también pueden provocar confusiones en las definiciones y tratamiento que se le da a los términos por no estar definidos correctamente. Cuando se escribe un libro de texto se debe pensar que sea legible, tal y como lo define Orton (1990), esto es, que no interrumpa el lenguaje la comprensión de los conceptos que estamos

estudiando. Existen libros de texto que no hacen un esfuerzo en este sentido y no dan la definición de los términos que corresponde en el contexto matemático. En otras ocasiones, el libro de texto adorna la definición, o simplemente da una definición errónea. Estas diferencias en las definiciones no son fácilmente localizables, y los estudiantes no poseen el conocimiento necesario para identificar el error. Además, el profesorado admite que utiliza el libro de texto como instrumento de formación sobre estos conceptos relativos a la Inferencia Estadística, con lo que la única definición que conoce de los términos es la que aparece en estos libros de texto. Esto hace que el docente no tenga criterio para decidir qué términos están bien definidos y cuáles no, dejando toda la responsabilidad sobre los términos relativos a la Inferencia Estadística a los libros de texto. Con este estudio también hemos podido constatar que, efectivamente, el lenguaje que se utiliza en este nivel educativo está compuesto, en gran medida, por términos específicos matemáticos. Debemos ser conscientes de que estos estudiantes se están preparando para comenzar el estudio de una matemática superior, por lo que los conceptos, y por tanto, los términos son fundamentales y deben estar bien definidos. En particular, el Contraste de Hipótesis necesita muchos términos propios del lenguaje matemático para su desarrollo. Son muchos conceptos nuevos que el estudiante debe asimilar correctamente para así entender el razonamiento y el procedimiento necesario para resolver correctamente un Contraste de Hipótesis.

Concluyendo: en el análisis de los libros de textos, sobre aquellos términos relativos a la Inferencia Estadística, hemos encontrado que el contexto de trabajo es determinante en el significado de los términos, y que en ocasiones, la definición que de estos términos aparece en los libros de texto no se corresponde con la propia del contexto matemático, sino más bien con la del contexto cotidiano.

3. Análisis de cómo entienden los términos los estudiantes

Una vez hemos clasificado los términos, nos interesa conocer cómo cada una de las características que hemos encontrado en la fase anterior afecta a la comprensión de los términos por parte de los estudiantes: concordancia, o no, entre el contexto, la tecnicización de los términos o la ausencia de definiciones.

Para ello realizamos un cuestionario en el que se le plantea al estudiante que elabore su definición o utilice conceptos estadísticos que aparecen en los libros de texto, siguiendo la clasificación de los términos dada en el apartado anterior. Así, para la elaboración del cuestionario se tuvieron en cuenta tanto los términos que se estudian en Bachillerato como las categorías en que se enmarca cada uno. En la siguiente tabla se muestran los términos seleccionados para el cuestionario según cada categoría:

Categoría	Término estudiado (Número de pregunta)
Mismo significado en ambos contextos	Población (P2), Individuo(P3)
Distinto significado en ambos contextos	Muestra (P4, P5B, P6), Inferir (P12), Significativo (P15), Distribución (P13)
Significado propio en el contexto matemático	Estadístico (P14), Muestreo aleatorio (P16)

El estudio se realizó con 26 estudiantes. De estos, 14 eran estudiantes del último curso de Bachillerato con edades comprendidas entre 17 y 20 años, mientras que los otros 12 estudiantes eran del último curso de la Facultad de Matemáticas con edades comprendidas entre 21 y 25 años.

Para el análisis del cuestionario utilizaremos la taxonomía SOLO (Biggs & Collis, 1982, 1991). Este análisis caracterizará la respuesta del estudiante ante una situación concreta en un estadio determinado de la taxonomía. Esto nos permitirá analizar la cualidad del aprendizaje, siendo los



estadios de comprensión las formas equivalentes de expresar la cualidad del aprendizaje manifestado por los estudiantes ante una tarea particular. Los estadios de comprensión son: Preestructural, Uniestructural, Multiestructural, Relacional y de Abstracción ampliada.

En nuestro modelo no hemos planteado tareas encaminadas hacia la abstracción ampliada, por lo que no utilizaremos este estadio y sí aparecen muchas respuestas de alumnos que no podemos situar en el estadio Multiestructural ni Relacional, por lo que, utilizando la clasificación adaptada de García Cruz & Garrett (2008), introducimos un estadio denominado de Transición. Así, los diferentes estadios de la clasificación adaptada que utilizamos para el análisis del cuestionario queda de la siguiente manera:

El estadio *Preestructural* queda asociado con las respuestas que indican un nivel bajo de aprendizaje con respecto al nivel de abstracción que exige la tarea, o que expresan fundamentos de carácter subjetivo, mostrando que el estudiante está despistado o atraído por aspectos irrelevantes. En algunas respuestas el estudiante da simplemente una afirmación y no argumenta, presenta ideas incompletas, o muestra no haber hecho ningún intento real de dar una respuesta apoyada en evidencias.

El estadio *Uniestructural* se asocia con las respuestas fundamentadas en ideas imaginarias y/o relacionadas con sus experiencias de lo cotidiano. En algunas de ellas, el estudiante se centra en un aspecto del dato y lo usa para justificar su respuesta, o considera un atributo concreto dentro de sus propias experiencias, estimándolo suficiente para la situación.

El estadio *Multiestructural* se caracteriza por la respuesta del alumno dada en la dirección de la tarea, muestra algunas características adecuadas de la misma, pero no integra correctamente los diferentes elementos, fundamentalmente porque atribuye significados diferentes al requerido en la tarea. El estudiante en este estadio muestra un conocimiento aislado de definiciones, fórmulas, algoritmos y procedimientos.

El estadio *de Transición* que recogerá las respuestas de aquellos alumnos cuyos pensamientos manifiestan el uso de razonamientos adecuados, llegando incluso a proporcionar vías correctas y coordinadas. Sin embargo, aún necesitan de un refinamiento o perfeccionamiento, pues no aparece aún una estructura coherente y significativa en lo que exige la tarea.

El estadio *Relacional* se caracteriza porque en él, el estudiante realiza conexiones precisas entre los diferentes elementos. Integra las diferentes partes, definiciones, propiedades, fórmulas, algoritmos, procedimientos, condiciones de aplicación, en el proceso de desarrollo de la misma y con ella completa una estructura coherente y significativa.

Tras el análisis de las respuestas hemos podido constatar que los estudiantes presentan dificultades a la hora de trabajar con los términos estadísticos. En las definiciones de los términos correspondientes a la Categoría 1 encontramos que, a pesar de presentar el significado en ambos contextos, los estudiantes no son capaces de dar la definición adecuada para el contexto en el que se encuentran. Incluso, teniendo una formación mucho mayor, los estudiantes universitarios no mejoran la definición de términos clasificados en esta categoría. Un término tan utilizado en estadística como es el de *Población*, los estudiantes de bachillerato, sin formación estadística, no son capaces de dar una definición adecuada. Llama la atención que, a pesar de estar en el aula de matemáticas, con el profesor de matemáticas, las respuestas parecen no estar enmarcadas en el contexto matemático. ¿Qué hace que el estudiante se sienta en un contexto matemático?

Cuando analizamos los términos de la Categoría 2, observamos que la confusión entre los tipos de respuestas aumenta. Esto corrobora lo que en principio se intuía, que estos términos hay que definirlos correctamente para que no haya confusión entre los contextos de trabajo. Pero por otro lado,

subyacen concepciones erróneas que con el paso del tiempo y una mayor formación, no se subsanan y persisten. Así, entre los estudiantes universitarios hay muchos que, independientemente del contexto del ejercicio, sigue pensando en que la muestra debe ser representativa e imitar a la población de la que proviene. Cometan el error descrito por Kahnemann et al. (1982): la *heurística de la representatividad*, anteriormente citado. Otro hecho que podemos observar es que el contexto de urnas y monedas le resulta al estudiante más fácil de analizar que otro tipo de contexto. En clase de matemáticas se trabaja mucho este tipo de situaciones y en cambio, no se trabajan otros tipos de contextos de los que extraer muestras. Esto hace que para el alumnado resulte más familiar y manejable, mientras que el contexto del centro educativo que, aparentemente parece ser cercano, en él el alumnado no es capaz de decidir correctamente si el muestreo realizado es adecuado para el estudio estadístico o si es preferible realizar otro tipo de muestreo.

Con los términos de la Categoría 3 la situación cambia completamente. Los estudiantes de Bachillerato no han recibido ningún tipo de formación sobre ellos y podemos observar que, efectivamente, si los términos no han sido definidos previamente difícilmente podrá acercarse lo que entienden por él a su definición en Estadística. Pero es más, entre los estudiantes universitarios, que sí han recibido formación estadística en algún momento, observamos que también tienen dificultades para dar su definición y muchos de ellos ni responden a lo que se les pide o lo hacen de manera incorrecta.

En general, la formación que tienen los estudiantes sobre los términos se reduce a dar su definición. Es necesario que mostremos las definiciones en diferentes situaciones y a su vez dar situaciones que no cumplan la definición. Sólo de esta manera podrán integrar bien todos los elementos que forman parte del concepto. Por otro lado, es importante que trabajemos concienzudamente los errores conceptuales que pueden venir del contexto cotidiano, pues estos errores no se superan con una mayor formación o con el paso del tiempo, sino que persisten mientras no se traten de erradicar. Los estudiantes universitarios tienen mayor formación y, por tanto, mayores estrategias y están más habituados a reflexionar sobre sus decisiones, pero los errores que se perciben en los estudiantes de bachillerato no varían sustancialmente con el paso del tiempo ni con una formación más específica.

4. Diseño didáctico

Dentro de la investigación desarrollada nos planteamos diseñar una propuesta de enseñanza que nos permitiera desarrollar la enseñanza de la estadística en Bachillerato con la que salvar alguna de las dificultades encontradas. Para ello seguimos el diseño propuesto por Swan (2008), que en origen lo desarrolló para la elaboración de diseños didácticos en álgebra. Hemos hecho una adaptación a la Inferencia Estadística, y más concretamente a la estimación de un parámetro mediante un intervalo, pues es el punto de partida de la Inferencia Estadística en Bachillerato.

En este modelo se propone que el papel del docente incluya:

- guiar a los estudiantes y hacer un uso constructivo del conocimiento previo;
- que el propósito de la actividad sea claro;
- desafiar a los estudiantes a través de cuestiones efectivas y probadas;
- realizar debates en pequeños grupos y con toda la clase;
- alentar la discusión de puntos de vista alternativos;
- extraer las ideas importantes en cada lección;
- ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre sus ideas.



Como podemos observar, este modelo difiere del aprendizaje “por descubrimiento”, donde el profesor presenta simplemente tareas y espera que los estudiantes exploren y descubran las ideas por sí mismos. El docente tiene otro papel.

Los principios que nos propone Swan (2008) que sigamos son los que a continuación indicamos:

- La importancia de centrarse directamente en los obstáculos conceptuales clave, basándose en los conocimientos que ya tienen los estudiantes;
- La creación de tensión y conflicto cognitivo que pueda ser resuelto a través de la discusión;
- Utilización de tareas que sean «accesibles, extensibles, que alienten la toma de decisiones, creativas y que cuestionen un orden superior;
- Uso de múltiples representaciones para crear conexiones;
- Uso de tareas que permitan a los estudiantes cambiar su papel, en el que se expliquen y se enseñen unos a otros.

Además debemos tener en cuenta las trayectorias de enseñanza y aprendizaje de Heuvel-Panhuizen (2001) que describen cómo aprenden los estudiantes. Esto es, que el alumnado ha tenido diferentes experiencias formativas y presenta diferentes ritmos de aprendizaje. Todo esto provoca que los estudiantes aprendan un mismo concepto en diferentes momentos y requieran de distintos puntos de vista.

En nuestra propuesta tratamos de conjugar todo lo dicho para favorecer el aprendizaje que buscamos en los estudiantes.

4.1 Elaboración de la propuesta de enseñanza

Proponemos a los alumnos encontrar un dato que resuma las estaturas de 180 estudiantes de 2º de Bachillerato.

174	180	162	161	165	171	162	163	175	169
162	167	172	178	174	162	160	172	183	168
184	180	169	160	155	169	163	164	169	165
168	177	170	160	165	176	168	162	165	170
156	168	174	150	170	187	152	170	169	173
174	163	176	155	173	178	199	174	179	161
164	168	175	162	170	180	181	170	174	170
164	175	167	178	170	176	168	178	167	175
160	173	164	168	160	171	171	163	166	177
183	174	175	176	160	182	171	168	170	173
165	169	181	175	165	172	158	168	167	167
175	165	184	182	175	172	171	167	168	171
181	165	181	163	173	176	175	187	163	172
178	154	186	163	189	178	182	168	162	171
175	178	175	170	178	172	162	162	156	175
188	181	160	165	174	180	161	180	184	168
179	160	165	172	175	175	181	168	186	159
159	182	173	174	171	179	177	162	173	162

El primer planteamiento que se les hará al alumnado es el siguiente:

1. Queremos resumir la información contenida en esta tabla. ¿Qué se te ocurre que podría resumir los datos? ¿Por qué?

Con esta primera cuestión, tratamos de que los estudiantes se enfrenten a una situación estadística real, en la que tienen que trabajar con muchos datos y sacar conclusiones. Al principio tendrán que utilizar las herramientas que poseen y que en este caso estarán relacionadas con la estadística descriptiva.

Hacemos hincapié en el contexto, pues creemos que es importante que se utilicen situaciones cercanas a los estudiantes y que, de esta manera, las interpretaciones que hagan tendrán mayor sentido para ellos.

En este momento, el profesor ha lanzado la pregunta y el planteamiento debe ser que los estudiantes comenten entre ellos y al grupo las ideas que van surgiendo. En un primer momento el profesor no debe intervenir salvo para animar la discusión.

El desarrollo de esta primera parte será oral, aunque en ocasiones le propondrá que realicen operaciones en su libreta para justificar las exposiciones que realicen los estudiantes de manera oral.

Una vez, hayan pensado que la media es el parámetro que conocemos que mejor resume los datos que tengamos pasaremos a la siguiente cuestión:

2. Ahora que sabemos que buscamos la media, ¿cómo la podemos calcular para todos los datos?

El profesor deja caer la pregunta para que reflexionen sobre el método de cálculo. Al principio tratarán de hacerlo con todos los datos, pues están habituados a calcular la media de los datos que se presenten, sin reflexionar sobre el esfuerzo que puede llevar. En este caso, y dado que hemos presentado una cantidad importante de datos, esperamos que algunos estudiantes se planteen la dificultad que surge por la enorme cantidad de datos. Si no es así, el profesor les planteará que busquen la manera de calcularla pero sin tener que hacerlo con todos los datos.

Una vez que los estudiantes lleguen a reconocer que se podría extraer una muestra para realizar el cálculo de la media se les propone lo siguiente:

a. MUESTRA. ¿Por qué una muestra? ¿cómo la escogemos?

Con esto queremos explicitar la necesidad que surge en ocasiones de trabajar con muestras y qué cosas tenemos que decidir a la hora de seleccionarnos. También veremos si se explicitan aquellos errores conceptuales que hemos descrito previamente y que tienen que ver con este término. Tendremos que decidir varias cosas de la muestra:

b. AZAR. ¿de qué forma sabes que los estás escogiendo al azar?

i) Sorteo. ¿cómo?

ii) Escoger los 20 primeros, ¿estaría bien?

Tratamos de mostrar a los estudiantes que decidir que algo es debido al azar no es muchas veces tan sencillo como “escoger como quiera”. Queremos que analicen modos de seleccionar de los datos y



que indiquen si son o no al azar, es decir, si creen que pudiera darse una circunstancia para pensar que la selección hecha ha sido intencionada.

c. CANTIDAD. ¿Cuántos datos escogemos? ¿Muchos? ¿cuántos son muchos? ¿la mitad son muchos? ¿cuántos son pocos? ¿Cinco datos son pocos, y diez?

Otro elemento que tenemos que decidir cuando realizamos una muestra. ¿Qué ventajas e inconvenientes tienen unas cantidades frente a otras? Deben darse cuenta que a mayor cantidad de datos más trabajo y también más nos acercamos al verdadero valor de la media para esta población.

d. ALGORITMO

- i) **Media. ¿Cuál escogemos de todas? ¿Son todas buenas?**
- ii) **CASO. Mi sorteo me dio los resultados: 189, 199, 187, 186, 187, 186, 184, 184, 188, 184. La media es: $187\frac{1}{4}$. ¿Es buena aproximación?**
- iii) **Media de medias. ¿Sería mejor aproximación? ¿qué le pasa a la media de medias?**

Ya hemos llegado a la conclusión de que debemos realizar una muestra de la población, que esta debe ser al azar y que con los datos que escojamos calcularemos una media. Nuestro siguiente problema es que la media que vamos a obtener cada uno será diferente. Enfrentaremos así a los estudiantes por primera vez a la no-unicidad de las soluciones en estadística. Aparece el error por primera vez. Está claro que en estadística se cometen errores, pues no obtenemos la solución exacta, sino una aproximación y por esto se dice que estamos estimando un valor. Esto debe causar en los estudiantes cierta inseguridad, pues están acostumbrados hasta este momento que en la clase de matemáticas los resultados tienen que darles a todos igual. En ocasiones, cuando se trabaja inferencia estadística también se hacen los problemas para que a todos los estudiantes les dé el mismo resultado. Todo esto va generando una confusión conceptual, y por comodidad del docente, transmitimos que la estadística es inmutable, como el resto de las matemáticas.

3. ESTIMACIÓN. Define este término.

En este punto queremos fijar algunos conceptos. Queremos ver qué entienden los estudiantes por este término y partiendo de sus concepciones tratar de dar la definición matemática de este término. Para ello les realizaremos las siguientes cuestiones, con las que podremos extraer su idea de estimación:

a. ¿Qué significa obtener una estimación? ¿qué estamos estimando?

No sólo nos interesa que conozcan el significado sino que sepan cómo se utiliza y cómo se extraen estimaciones. Estamos siguiendo el modelo propuesto por Swan (2008), pues guiamos a los estudiantes y hacemos un uso constructivo del conocimiento previo.

b. La media obtenida, ¿es una estimación? ¿de qué?

Con esta cuestión les estamos desafiando a que prueben que es una estimación, que cumple los requisitos que ellos creen que debe tener un valor estimativo. Alentamos la discusión y ayudamos a los estudiantes a realizar conexiones.

4. Define “ESTIMACIÓN PUNTUAL”

Seguimos sentando las bases de los términos específicos matemáticos. Ahora con Estimación Puntual. Este término y el siguiente son muy recurridos en estadística. Es por ello que debemos dejarlos bien definidos para evitar dificultades de comprensión posteriores de otros términos en los que estos se vean implicados.

5. Define “ESTIMACIÓN POR INTERVALOS”

Aunque no añade el profesor más cuestiones sobre estos términos, está claro que durante el desarrollo de la sesión de clase, éste podrá incorporar cuestiones relativas a estos términos y los podrá ilustrar dentro del trabajo que están desarrollando con las estaturas de los alumnos.

6. ERROR de la estimación. ¿Cómo lo definirías? ¿qué puede hacer que este error de estimación sea mayor o menor? ¿De qué depende?

No podemos hablar de estimación sin mencionar el error. Como se indicó anteriormente, para los estudiantes es una novedad que los resultados en matemáticas no sean exactos y que tengamos que llegar a conclusiones sobre resultados aproximados.

Con todos estos términos estamos tratando de que el estudiante siga los pasos para comprender los conceptos, tal y como lo describe Swan (2008), identificando los términos, discriminándolos de otros similares, generalizando extrayendo sus propiedades y sintetizando.

7. FORMALIZACIÓN. Variable X = estatura de los estudiantes. Sigue una distribución normal. Pero desconocemos la media de la distribución. Sí conocemos la desviación típica: 8'07.

Llegados a este punto, el profesor tendrá que matematizar el proceso seguido. Se trata de redactar en lenguaje matemático formal la situación en la que se encuentra nuestro problema. Esto es un salto importante en el discurso de la clase, pero es necesario para poder lograr el objetivo propuesto: encontrar un intervalo que nos permita controlar la media de la población con un error determinado. Hay un valor que será conocido en todo el proceso: la desviación típica de la población. De esta manera tratamos de centrarnos en la media de la distribución y de la población, aislamos el problema que tenemos desde un principio para que los estudiantes no se pierdan ante muchos datos desconocidos. Los estudiantes conocen la distribución normal teórica, reconocen los parámetros que la identifican y son capaces de realizar cálculos utilizando la tabla de valores de dicha distribución.

8. ¿Qué distribución siguen las medias muestrales?

Esta pregunta se realiza aquí en una situación concreta. Los estudiantes han estudiado de manera teórica y con problemas ficticios la distribución de medias muestrales. Tratamos de ver si con la formación recibida son capaces de trasladarla a esta situación nueva que da sentido a lo estudiado previamente.

9. Buscamos un intervalo de la distribución normal que encierre el 90% de todas las medias que podamos calcular.

- a. Se trata de un intervalo característico.
- b. Busca el valor superior del intervalo para el caso concreto de los datos que tenemos de nuestra distribución.



- c. ¿Qué harías con la media que desconoces?
- d. Si la sustituimos por la media muestral, lo que hacemos es **CONFIAR** en que la media de la población esté dentro del intervalo que encontremos. 95% es la **CONFIANZA** que fijamos de tener la media de la población dentro.
- e. ¿A todos les dio el mismo número? ¿Por qué? ¿Está mal?
- f. La media de la población es 170'76. Indica cuántos la tienen en su intervalo. Comprobar que se trata de un 95% de los casos.

En este momento aparece el intervalo de confianza. El profesor tiene aquí una labor muy complicada, pues tratará de hacer ver a los estudiantes cómo un intervalo característico pasa a ser un intervalo de confianza. Muchos de los libros de texto analizados se saltan esta explicación y van directamente a mostrar una fórmula con la que calcular el intervalo de confianza. La explicación que va a seguir el profesor será la siguiente:

Tratamos de buscar “d” que cumpla:

$$P(|\bar{x} - \mu| \leq d) = 0,95$$

Con esto aseguramos que el 95% de las medias muestrales diste menos de una cantidad d de la media poblacional.

$$P(-d \leq \bar{x} - \mu \leq d) = 0,95$$

$$P\left(\frac{-d}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{d}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0,95$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \approx N(0,1)$$

Sea cual sea la media poblacional, pues no depende de su valor.

Recordemos que la desviación típica y n son conocidos.

Buscamos los valores, en la $N(0,1)$ que encierran esa probabilidad y que coinciden con los valores críticos para dicha probabilidad.

Lo que obtenemos es la distancia que habrá entre las medias con probabilidad 0,95

Deshaciendo totalmente la desigualdad obtenemos la fórmula del intervalo de confianza comúnmente utilizada.

10. Ahora se trata de encontrar una fórmula que nos dé el valor superior de dicho intervalo. ¿Qué se te ocurre hacer?
11. Busca también la fórmula para el valor inferior del intervalo.

Estas cuestiones tratan de extraer las fórmulas que conocemos para el cálculo de los intervalos de confianza.

12. ¿Qué amplitud tiene nuestro intervalo? O lo que es lo mismo, ¿qué distancia hay entre los extremos de los intervalos?

Anteriormente hablamos de que en toda estimación se cometía un error. Tratamos ahora de ver que, independientemente de la media que hemos elegido de la muestra, todos tenemos un intervalo con la misma amplitud. Todos tienen la misma distancia entre los extremos. Les trataremos de pedir que analicen por qué ocurre esto, qué estamos haciendo todos por igual para que nos dé el mismo valor.

13. La amplitud ¿varía entre nosotros? Ese dato es el ERROR.

Daremos nombre a ese valor común a todos los resultados, la amplitud del intervalo es el error que estamos cometiendo en nuestra aproximación.

14. ¿Qué datos influyen en este error? ¿Qué hemos necesitado para construir el intervalo? ¿Puedes dar la fórmula de cálculo del error cometido?

Volveremos a analizar los datos que intervienen en el cálculo de dicho error para aislarlos y poder comprender cómo funciona.

15. ¿Qué datos necesitamos conocer para calcular el intervalo de confianza?

Definimos como Intervalo de Confianza de confianza $\alpha\%$ a aquel que en una muestra repetida contiene el valor real de la media poblacional con una probabilidad igual a la confianza que prefijamos para construir el intervalo.

Veamos cómo afecta al intervalo de confianza los datos que entran en juego.

16. Ahora supongamos que cambiamos el nivel de confianza al 99%. ¿Qué le pasará al nuevo intervalo de confianza?

Ahora que ya conocemos cómo calcular un intervalo de confianza trataremos de ver cómo varía este cuando cambiamos la confianza. Los estudiantes tienen que llegar a la conclusión que cuanto más confianza queremos, mayor es el intervalo y mayor es, por tanto, el error que estamos cometiendo.

17. Si cambiamos el tamaño de la muestra, ¿cómo variaría el error cometido? ¿Y en consecuencia, qué ocurriría con el intervalo de confianza?

En cambio, con el tamaño de la muestra las cosas cambian, cuantos más datos tenemos más podremos afinar en nuestro intervalo, más pequeño será y con más confianza podemos decir en qué intervalo se encuentra la media poblacional.

18. Y si en vez del error modificamos el nivel de confianza, ¿qué ocurriría con el intervalo? ¿Y con el error?

19. Sobre los intervalos de confianza:

- a. Si aumentamos el nivel de confianza, ¿aumentará la cantidad de datos que tenemos en el intervalo? ¿o lo que aumenta será el número de decimales?



b. ¿Qué significa este intervalo?

c. ¿Qué significa el nivel de confianza?

Estas dos últimas cuestiones tratan de sistematizar todo lo que hemos ido viendo a lo largo de esta sesión para que los estudiantes tengan claro el trabajo que se ha realizado hasta este momento.

Hasta este momento hemos descrito el trabajo previo de preparación de las sesiones encaminadas hacia la construcción del intervalo de confianza. En esta preparación hemos podido observar que el profesor ha tratado de hacer partícipe a los estudiantes en la construcción de los objetos matemáticos que se pretende conocer, y partiendo de sus conocimientos previos, llegar a construir de manera guiada los nuevos conceptos.

El desarrollo de la propuesta de enseñanza se llevó a cabo durante el curso 2008/2009 con estudiantes de 2º de Bachillerato, en la Modalidad de Ciencias Sociales, en un Instituto de Educación Secundaria de Santa Cruz de Tenerife. El centro educativo se encuentra situado en una zona periférica de la ciudad y los estudiantes tienen poca motivación hacia el estudio, tanto interna como externa. El entorno socioeconómico en el que se sitúa el centro es medio-bajo, con un alto índice de paro y con familias con escasa cualificación profesional.

La clase estaba compuesta por 14 alumnos, 9 chicas y 5 chicos. Son los mismos estudiantes a los que se les administró la encuesta sobre los términos estadísticos, presentada en el apartado 3. Todos ellos son muy regulares en la asistencia a clase, por lo que no faltaron durante el desarrollo de las sesiones.

En este caso, el investigador coincide con el profesor que les da clase durante el citado curso. Además, fue su profesor de matemáticas durante el curso anterior. Por tanto, es conocedor de la formación estadística que poseen y cuál puede ser el punto de partida adecuado para comenzar a desarrollar la inferencia.

4.2 Conclusiones del desarrollo de la propuesta de enseñanza

La propuesta ha tenido como objetivo de la instrucción la construcción de los intervalos de confianza y el análisis de todos los términos y conceptos que van surgiendo por necesidad hasta llegar a los intervalos de confianza. Del desarrollo del modelo propuesto podemos destacar los siguientes aspectos:

Metodología

El modelo exige que los estudiantes participen de manera activa y que lo hagan comunicando su razonamiento, primero por escrito y luego en voz alta, a toda la clase. Esto es un cambio significativo tanto para ellos como para el profesor, pues este tiene que perder protagonismo y debe cederlo a los alumnos. Este elemento dentro de las sesiones ha hecho, en principio, que las clases fueran más lentas, que los alumnos se atascaran ante las cuestiones que plantea el profesor y que éste tuviera que decidir el avance para evitar la sensación de “pérdida de tiempo”. Todo esto hizo que en ocasiones el profesor diera la respuesta de lo que preguntaba sin esperar que los estudiantes intervinieran o expresaran sus razonamientos. Por otro lado, hubo estudiantes que no participaron o lo hicieron de manera muy limitada. La metodología propuesta requiere que los estudiantes sean capaces de seguir el trabajo desarrollado. Esto obliga a que los estudiantes lleven el trabajo al día y hay estudiantes que presentan rechazo hacia la asignatura por las dificultades que la materia les supone. Es por ello que los

estudiantes que más participaron fueron aquellos que llevaban las tareas al día y se sentían capaces de responder al profesor de manera más o menos coherente, y son los que participaron en el estudio.

Términos

Los términos estadísticos surgen de manera natural en el aula. Hemos visto que aparecen los términos de las distintas categorías descritas a lo largo de este trabajo.

Cabe destacar que los estudiantes no son capaces de permanecer en los estadios más avanzados durante las sesiones. Los alumnos llegan, en el mejor de los casos, a reconocer los diferentes aspectos de la tarea, pero que no los integran correctamente. Creemos que esto se debe a varias razones. En primer lugar, estamos trabajando con términos propios del lenguaje matemático en muchos casos y son abordados por los estudiantes por primera vez. Estos términos, aparte de ser definidos, requieren que se trabaje con ellos para poder llegar a asimilarlos correctamente y en toda su extensión. Para ello es necesario trabajarlos en diferentes situaciones y contextos. Por otro lado, el factor tiempo es muy importante. Les hemos dedicado cuatro sesiones y han aparecido los términos: *muestreo aleatorio*, *nivel de confianza*, *media poblacional*, *media muestral*. Son todos términos nuevos y se dispone de poco tiempo para asimilarlos y comprender cómo interactúan entre sí todos ellos y con los que ya se conocían: *tamaño de la muestra*, *media*, *muestra*, *probabilidad*, entre otros. Todo esto justifica que los estudiantes no produzcan respuestas más ricas en cada uno de los términos estudiados.

El contexto

Para los estudiantes el contexto propuesto ha resultado bastante cómodo y sencillo de entender. Este elemento es básico, pues no estamos añadiendo dificultad en el planteamiento de la actividad, sólo aquellas que son propias de los conceptos que vamos a desarrollar. Por otro lado, los conceptos estadísticos surgen de forma natural y, además, situados en una situación concreta sobre la que se está realizando el estudio. La naturalidad con la que aparecen los conceptos ayuda a que los estudiantes puedan entenderlos mejor y, que por otro lado, puedan reconocer situaciones semejantes en las que puedan aplicar los mismos procedimientos utilizados en esta situación. Así, por ejemplo, los estudiantes reconocen la media como valor intermedio para un conjunto de datos, pero, a través de este trabajo han visto que la media además sirve para resumir la información contenida en una tabla. Ese aspecto de la media lo han asimilado con naturalidad debido al contexto en el que se les presenta la tarea. Los estudiantes, fácilmente comprendieron lo que se les pedía y aceptaron que la media era un buen estimador de las estaturas. Por otro lado, mostrar muchos contextos de trabajo diferentes en los que surgieran los términos nos hacía reflexionar sobre el temor a que dichos contextos se convirtieran en un obstáculo para el aprendizaje. Esto ha provocado que finalmente no se muestre un mismo término en varios contextos desde que se define.

El profesor

El trabajo se desarrolló en cuatro sesiones de clase, las cuales fueron insuficientes para ver el desarrollo del modelo en toda su extensión. No se pudieron añadir más sesiones debido a la falta de disponibilidad de tiempo en el curso por parte de los participantes y del profesor. En este sentido, el nivel en que se realizó el estudio hizo que no se pudiera dedicar más de una semana (cuatro sesiones) a construir el intervalo de confianza, para luego abordar problemas rutinarios típicos de la Prueba de Acceso a la Universidad.

Además, los tiempos estaban tan cerrados que generó en el profesor cierta sensación de agobio, por temor a no cumplir con los plazos previstos. Esto repercutió de igual forma en el aprendizaje, pues en ocasiones, se limitó el tiempo para la enseñanza, pensando que de igual manera se limitaba el



tiempo para el aprendizaje. Lo cual es un error, pues el aprendizaje de cada alumno tiene su propio tiempo que es diferente y depende de muchos factores. Todo esto está en consonancia con la denominada Trayectoria de Enseñanza-Aprendizaje descrita por Heuvel-Panhuizen (2001), y, efectivamente, los alumnos describen diferentes trayectorias de aprendizaje para una misma trayectoria de enseñanza. Por otro lado, el aprendizaje no se puede considerar de manera lineal, y los estudiantes pueden llegar a conseguir las habilidades que se les requiere cuando menos lo espere el profesor, como también nos advierte Heuvel-Panhuizen (2001).

Por tanto, aunque no se han podido trabajar todas las actividades que configuran el programa establecido para nuestro experimento de enseñanza, dado que no se pudo extender la fase de trabajo en el aula, pensamos que nuestro proyecto de enseñanza-aprendizaje ha ayudado a comprender de qué manera aparecen los términos estadísticos en el aula, y las dificultades con las que se pueden encontrar los profesores y los alumnos cuando se enfrentan con estos términos. No es nada sencillo tener que construir un concepto estadístico en el que intervienen tantos elementos diferentes, y tener en cuenta además los errores conceptuales previos para poderlos tratar de superar. Hemos visto cómo la heurística de la representatividad descrita por Kahnemann et al. (1982) está continuamente presente. Además, es tan recurrente que interfiere en la construcción de todos los conceptos relacionados con las muestras extraídas. Creemos que la propuesta ayuda a que, los estudiantes sean conscientes del error que cometen cuando generan muestras que exigen que sean representativas de la población. Por otro lado, los términos que manejan los estudiantes se encuentran en un estadio poco avanzado, entre otros motivos, porque entendemos que cuando se introducen nuevos términos, estos hacen que entren en conflicto con los términos previos y por tanto, desarrollen tareas con dichos términos dentro de los estadios poco elaborados. Aún así, creemos que es el camino para poder avanzar y comprender mejor los términos, pues los estudiantes han tenido que aislar los términos y contrastarlos entre sí.

El hecho de exponer los razonamientos en voz alta también es muy importante, pues permite que utilicen el lenguaje matemático y que adquieran los términos nuevos con más facilidad, pues no es sólo el profesor el que los utiliza, sino que el alumnado, desde un primer momento debe hacer uso de ellos y facilita al profesor la oportuna corrección. Esto permite, a su vez, que el profesor pueda ir comprobando que los estudiantes los vayan asimilando correctamente y si no fuera así ayudarles a corregir el error conceptual que muestran.

5. Conclusiones generales del trabajo

A lo largo de toda la investigación nuestro objetivo principal ha sido el estudio de los términos estadísticos relativos a la Inferencia Estadística que surgen en Bachillerato, cómo los entienden y cómo los podemos introducir de manera que sean más fácilmente entendibles por el alumnado.

Hemos detectado que los libros de texto no dan siempre la definición correcta de los términos estadísticos y que lejos de ayudar a salvar problemas conceptuales graves los generalizan tomándolos como propios de la definición. Por otro lado, el libro de texto es también instrumento de formación del profesorado por lo que dichos errores conceptuales son transmitidos a los docentes que posteriormente formarán a los estudiantes.

Hemos comprobado que una mayor formación no implica que los errores conceptuales arraigados desaparezcan si no hay un interés concreto en ello. Por tanto, los docentes debemos ser muy cuidadosos a la hora de introducir los conceptos de Inferencia Estadística, y hacerlo de la forma más contextualizada y rica posible para que los estudiantes puedan comprenderlo sin cometer errores conceptuales graves.

Por último, la propuesta de enseñanza es válida para un aprendizaje guiado y en el que el alumnado pueda construir los conceptos evitando los errores conceptuales, pero requiere una serie de premisas que tal vez no se dieron en el experimento: suficiente tiempo para el desarrollo y exposición de los conceptos desde diferentes contextos y por otro lado, que los alumnos estén habituados a esta forma de trabajo y así evitar posibles dificultades que surgen por su puesta en marcha, más que por los conceptos a desarrollar.

Bibliografía

- Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York, NY: Academic Press.
- Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1991). Multimodal Learning and the Quality of Intelligent Behavior. In: H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Christiansen, B., Houson, A. G., Otte, M. (eds.). "Chapter 4: Textual Analysis". En: *Perspectives on mathematics education* (pp. 141-171). Kluwer Academic Publishers. 1986
- Dickson, L., M. Brown y O. Gibson (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor, Madrid.
- García Cruz, J.A. & Garrett, A.J. (2008): Understanding the arithmetic mean: A study with secondary and university students'. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education*. Vol. 12, nº 1, 49-66.
- Heuvel-Panguizen, M. (2001). *Children learn mathematics: A learning teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Holmes, P. (2002). Some lessons to be learnt from curriculum developments in statistics. En B. Phillips (Ed.) *Proceedings of the 53rd Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI*. Vol. 2, pp 165-167. Cape City: IASE.
- Kahnemann, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1982): *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press.
- McLean, A. (2002). Statistacy: Vocabulary and Hypothesis testing. *Proceedings of the sixth International Conference on Teaching of Statistics*. South Africa: IASE. Disponible en <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications>
- Mendenhall, W. (1982): *Introducción a la probabilidad y la estadística*. Wadsworth Int.
- Moore, D. (2005): *Estadística aplicada básica*. Barcelona: Antoni Bosch Editor.
- Orton, A. (1990). *Didáctica de las Matemáticas*. MEC y Morata, Madrid.
- R.A.E (2001): *Diccionario de la lengua española*. Madrid: Real Academia Española.
- Shuard, H. & Rothery, A (Eds) (1984): *Children reading mathematics*. London: Murray.
- Swan, M (2008). Designing a Multiple Representation Learning Experience in Secondary Algebra. *Journal of the International Society for Design and Development in Education*. Disponible en <http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue1/article3/index.htm>
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook on Mathematics Teaching and Learning* (p. 127-146). McMillan. New York.

Israel García Alonso, Licenciado y Doctor en Matemáticas por la Universidad de La Laguna. Actualmente es profesor de Enseñanza Secundaria en el Instituto de Enseñanza Secundaria El Médano, Granadilla de Abona en Tenerife. Ha realizado varias publicaciones en revistas nacionales e internacionales sobre la Inferencia Estadística y el lenguaje.

